سُؤال 2 :

معطى مستقيم ℓ معادلته $\underline{x} = (1,2,-4) + t(1,-2,2)$.

المستوى π يعامد المستقيم ℓ ، ويقطع المحور x في النقطة A .

النقطة A تقع على الشعاع الموجب للمحور x على بُعد 8 عن نقطة أصل المحاور O .

النقطتان B وَ C هما نقطتا تقاطُع المستوى π مع المحور y ومع المحور z بالتلاؤم.

أ. (1) جد طول كلّ واحد من ستّة أضلاع الهرم OABC .

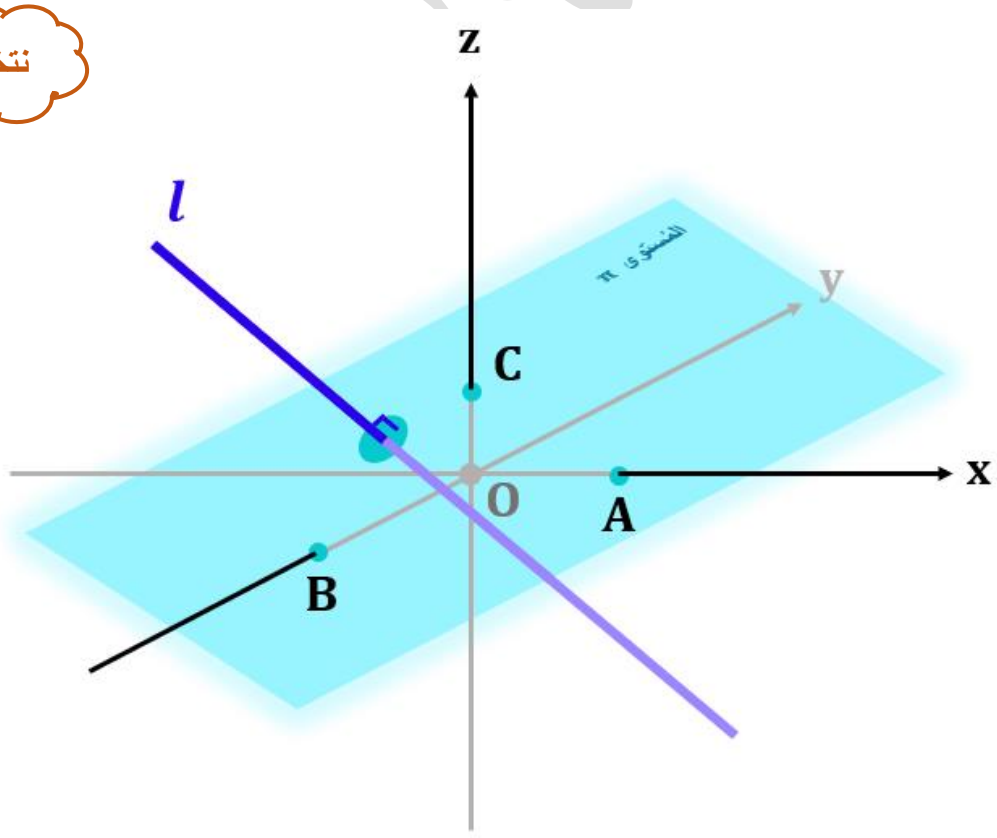
(2) هل الهرم OABC هو قائم؟ علّل.

ب. النقطة D تقع على القطعة AC بحيث OD ينصّف الزاوية AOC .

ما هي الحالة المتبادلة بين المستقيم OD والمستقيم BC ؟ علّل.

أ) (1)

نتخيَّل الشكل



إيهاب عمر

أوَّلا , نجد النُقاط A , B و C :

النُقطة A تقع على المحور x الموجب على بُعد 8 عن النُقطة O

$$\Downarrow$$

$$A(8,0,0)$$

المُستقيم l يُعامد المُستوى π , أي أنَّ مُتَّجه الاتجاه للمُستقيم l هُو فكتور النورمال للمُستوى π

$$\Downarrow$$

$$\pi : x-2y+2z+d=0$$

$$l : (1,2,-4)+t(1,-2,2)$$

المُستوى π يمُر من النُقطة $A(8,0,0)$

$$\pi : x-2y+2z+d=0 \longrightarrow 8-2\cdot 0+2\cdot 0+d=0 \longrightarrow 8+d=0$$
$$\longrightarrow d=-8$$

$$\Downarrow$$

$$\pi : x-2y+2z-8=0$$

الان , نجد تقاطُعات المُستوى π مع المحور y ومع المحور z :

- مع المحور y $x=0\ ,\ z=0 \longrightarrow 0-2y+2\cdot 0-8=0 \longrightarrow -2y-8=0$
$$\longrightarrow 2y=-8 \longrightarrow y=-4$$

$$\Downarrow$$

$$B(0,-4,0)$$

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

مع المحور z - $x = 0\ ,\ y = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 - 2 \cdot 0 + 2z - 8 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2z - 8 = 0$

$$\longrightarrow \quad 2z = 8 \quad \longrightarrow \quad z = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C\,(0\,,0\,,4)}$$

✓ الان وبعد أن وجدنا النُقاط A , B و C يُمكننا إيجاد أطوال الأضلاع .

$$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \boxed{8}$$

$$CO = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2 + (z_C - z_O)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = \boxed{4}$$

$$BO = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2 + (z_B - z_O)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (-4-0)^2 + (0-0)^2} = \boxed{4}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + \big(0-(-4)\big)^2 + (0-0)^2} = \boxed{\sqrt{80}}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2 + (0-4)^2} = \boxed{\sqrt{80}}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (-4-0)^2 + (0-4)^2} = \boxed{\sqrt{32}}$$

(2)

الهرم القائم يكون فيه رأس يخرُج منهُ أضلاع مُتساوية الطول . وهذا الأمر لا يتحقَّق بالنسبة لِلْهَرَم OABC ولهذا فهُو ليس هرم قائم.

إيهاب عمر

ب)

بدايةً , نجد النُقطة D :

OD يُنصّف الزاوية $\measuredangle AOD$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{OC}{OA}$$ (نظريَّة مُنصّف الزاوية)

$$\Downarrow$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{4}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$DA : DC = 8 : 4 = 2 : 1$$

النُقطة D تقسم المُستقيم AC بنسبة $2:1$, نجد النُقطة D بواسطة القانون التالي :

احداثيات نُقطة تقسم قطعة أطرافها (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) بنسبة $\frac{k}{l}$: $\left(\frac{lx_1+kx_2}{k+l}, \frac{ly_1+ky_2}{k+l}, \frac{lz_1+kz_2}{k+l}\right)$

$$\Downarrow$$

$$D\left(\frac{1 \cdot x_A + 2 \cdot x_C}{1+2}, \frac{1 \cdot y_A + 2 \cdot y_C}{1+2}, \frac{1 \cdot z_A + 2 \cdot z_C}{1+2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$D\left(\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 0}{1+2}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{1+2}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 4}{1+2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D\left(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)}$$

الان , نجد مُعادلتي المُستقيمين OD و BC :-

OD

نُقطة - $O(0,0,0)$

مُتَّجه اتجاه - $\overrightarrow{OD} = D - O = \left(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3}\right) - (0,0,0) = \left(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3}\right)$

$$\Downarrow$$

$$OD : \underline{x} = (0,0,0) + t\left(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}t,0,\frac{8}{3}t\right)$$

BC

نُقطة - $B(0,-4,0)$

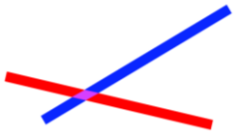
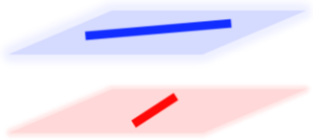
مُتَّجه اتجاه - $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,0,4) - (0,-4,0) = (0,4,4)$

$$\Downarrow$$

$$BC : \underline{x} = (0,-4,0) + k(0,4,4) = (0,-4+4k,4k)$$

إيهاب عمر

الحالات المُتبادلة بين مُستقيمين بالفراغ

	مُتوازيان	مُتّحدان	مُتقاطعان	مُتصالبان
				
مُتّجه الاتجاه	مُتعلّقان	مُتعلّقان	غير مُتعلّقان	غير مُتعلّقان
نُقاط التقاطُع	0	∞	1	0

نجد بالنسبة للمُستقيمين OD و BC ، أي الشُروط تتحقّق :-

نفحص وُجود نُقاط تقاطُع

$$\left(\frac{8}{3}t, 0, \frac{8}{3}t\right) = (0, -4+4k, 4k)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{8}{3}t = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{t = 0}$$

$$0 = -4+4k \quad \longrightarrow \quad 4k = 4 \quad \longrightarrow \quad \boxed{k = 1}$$

$$\frac{8}{3}t = 4k \quad \longrightarrow \quad \frac{8}{3}\cdot 0 = 4\cdot 1 \quad \longrightarrow \quad 0 = 1 \quad \text{X}$$

إيهاب عمر

⇓

لا يوجد نُقاط تقاطُع بين المُستقيمين OD و BC

⇓

المُستقيمان غير مُتقاطعان وغير مُتَّحدان

الان نفحص ما اذا كان مُتجها الاتجاه للمُستقيمين مُتعلّقان أم لا

$$\left(\frac{8}{3},0,\frac{8}{3}\right)=q\cdot(0,4,4)$$

⇓

$$\frac{8}{3}=q\cdot 4 \quad\longrightarrow\quad q=\frac{2}{3}$$

$$0=q\cdot 4 \quad\longrightarrow\quad q=0$$

$$\frac{8}{3}=q\cdot 0 \quad\longrightarrow\quad q=0$$

لا يوجد q واحد يُحقّق المطلوب ⇓

مُتَّجها الاتجاه غير مُتعلّقان

⇓

المُستقيمان غير مُتوازيان

⇓

المُستقيمان OD و BC هُما مُستقيمان مُتصالبان

معهد إيهاب عمر