# حساب مُثلّثات - صيف ب 2018

**5.** ABC هو مثلّث متساوي الساقين $(AB = AC)$ .

BD هو منصّف زاوية في المثلّث ABC .

امتداد القطعة BD يقطع الدائرة التي تحصر المثلّث ABC في النقطة E .

مقدار الزاوية ABC هو $2\beta$ .

أ. عبّر بدلالة $\beta$ عن $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ ، النسبة بين مساحة المثلّث ABC وبين مساحة المثلّث ADE .

لا حاجة لتبسيط التعبير الذي حصلتَ عليه .

معطى أنّ: طول BE يساوي طول نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلّث ABC .

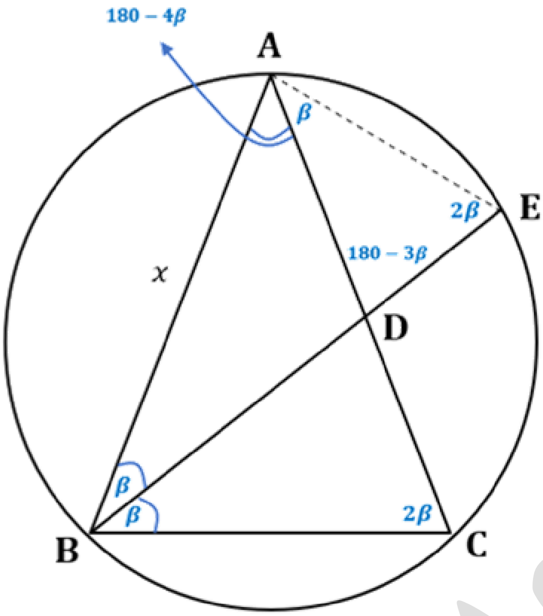
**ب.** احسب النسبة: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ .

نرمز بِـ a إلى طول الساق AB .

**جـ.** عبّر بدلالة a عن نصف قطر الدائرة المحصورة بواسطة المثلّث ABC .

في إجاباتك أَبقِ رقمين بعد الفاصلة العشريّة .

أ)




- $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 2\beta$ (زوايا القاعدة في مثلث متساوي الساقين متساوية)
- $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACB = 2\beta$ (زوايا مُحيطيَّة مُقابلة لنفس القوس هي زوايا متساوية)
- $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CAE = \beta$ (زوايا مُحيطيَّة مُقابلة لنفس القوس هي زوايا متساوية)
- نرمُز الضلع $AB$ : $x$ .

<u>ننظُر الى المُثلَّث $\Delta ABE$ :</u>

$$\frac{AB}{\sin(\sphericalangle AEB)} = \frac{AE}{\sin(\sphericalangle ABE)} \longrightarrow \frac{x}{\sin(2\beta)} = \frac{AE}{\sin(\beta)} \longrightarrow \boxed{AE = \frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(2\beta)}}$$

قانون سينوس العام

<u>ننظُر الى المُثلَّث $\Delta ADE$ :</u>

$$\frac{AD}{\sin(\sphericalangle AED)} = \frac{AE}{\sin(\sphericalangle ADE)} \longrightarrow \frac{AD}{\sin(2\beta)} = \frac{\frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(2\beta)}}{\sin(180-3\beta)} \longrightarrow AD = \frac{\frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(2\beta)}}{\sin(180-3\beta)}\cdot\sin(2\beta)$$

$$\longrightarrow AD = \frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(180-3\beta)\cdot\cancel{\sin(2\beta)}}\cdot\cancel{\sin(2\beta)} \longrightarrow AD = \frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(180-3\beta)} \longrightarrow \boxed{AD = \frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(3\beta)}}$$

$\sin(180-y) = \sin(y)$

معهد إيهاب عمر

المطلوب هو $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$ . نجد كل واحدة من المساحات على حِدة :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin(\measuredangle BAC)}{2}=\frac{x\cdot x\cdot\sin(180-4\beta)}{2}=\frac{x^2\cdot\sin(4\beta)}{2}$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{AE\cdot AD\cdot\sin(\measuredangle DAE)}{2}=\frac{\frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(2\beta)}\cdot\frac{\sin(\beta)\cdot x}{\sin(3\beta)}\cdot\sin(\beta)}{2}=\frac{\frac{\sin^3(\beta)\cdot x^2}{\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}}{2}$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{\sin^3(\beta)\cdot x^2}{2\cdot\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}$$

<u>أي أنَّ :</u>

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\frac{\cancel{x^2}\cdot\sin(4\beta)}{\cancel{2}}}{\frac{\sin^3(\beta)\cdot\cancel{x^2}}{\cancel{2}\cdot\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}}=\frac{\sin(4\beta)}{\frac{\sin^3(\beta)}{\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}}=\boxed{\frac{\sin(4\beta)\cdot\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}{\sin^3(\beta)}}$$

**ب)**

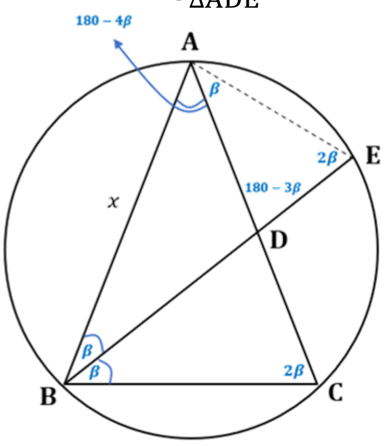
قانون سينوس العام

$$\frac{BE}{\sin(\measuredangle BAE)}=2R\ \longrightarrow\ \frac{R}{\sin(180-3\beta)}=2R\ \longrightarrow\ \frac{R}{\sin(3\beta)}=2R$$

$$\longrightarrow\ \sin(3\beta)=\frac{R}{2R}\ \longrightarrow\ \sin(3\beta)=\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow\ 3\beta=30\ \longrightarrow\ \beta=10^\circ$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\sin(4\beta)\cdot\sin(2\beta)\cdot\sin(3\beta)}{\sin^3(\beta)}=\frac{\sin(40)\cdot\sin(20)\cdot\sin(30)}{\sin^3(10)}=\boxed{20.99}$$

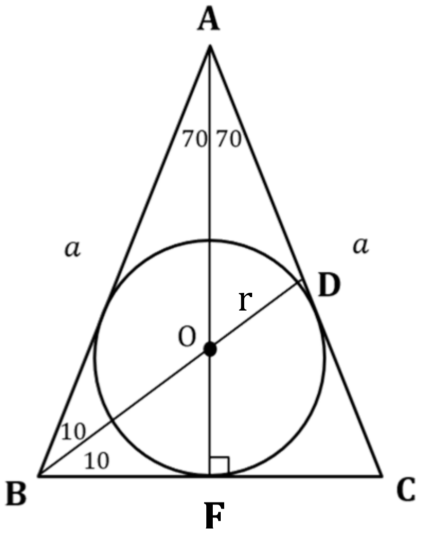



معهد إيهاب عمر

## ج)

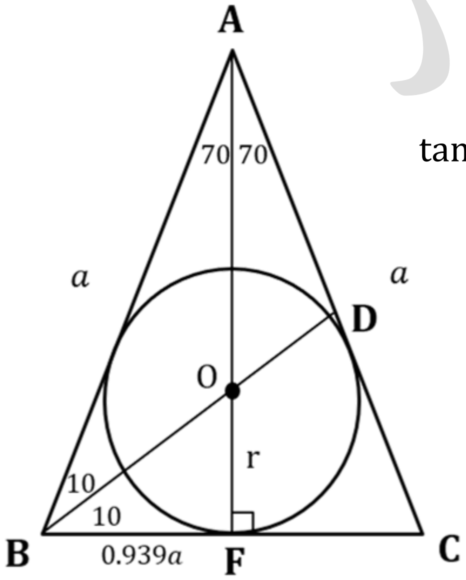
- نرمُز r نصف قُطر الدائرة المحصورة .
- منصف الزاوية $\measuredangle A$ يمر بمركز الدائرة المحصورة O ويُعامد القاعدة BC ويتوسطها .

<u>نجد BC عن طريق قانون الكوسينوس:</u>




$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\measuredangle A)$$
$$\downarrow$$
$$BC^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(140)$$
$$\downarrow$$
$$BC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos(140)$$
$$\downarrow$$
$$BC^2 = 2a^2(1 - \cos(140))$$
$$\downarrow$$
$$BC^2 = 3.532 \cdot a^2$$
$$\downarrow$$
$$BC = 1.8793a$$

$$\boxed{BF = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1.8793a = 0.93969 \cdot a}$$




<u>ننظُر الى المُثلَّث $\Delta BOF$ :</u>

$$\tan(\measuredangle OBF) = \frac{OF}{BF} \longrightarrow \tan(10) = \frac{r}{0.939a}$$
$$\longrightarrow r = 0.939a \cdot \tan(10) = 0.1656a$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{r = 0.1656a}$$

معهد إيهاب عمر