

بحث دالة كسرية صيف 2019 – موعد (ب)

8. معطاة الدالة $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. c و b هما پارامتران .

أ. جد مجال تعريف الدالة $f(x)$.

معطى أن الدالة $f(x)$ هي زوجية .

ب. جد b .

معطى أنه: توجد للرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطتا تقاطع مع المحور x بين خطي تقاربها العموديين .

ج. جد مجال قيم c .

د. (1) جد إحداثيات النقطة القصوى للدالة $f(x)$ ، وحدد نوع هذه النقطة (عبر بدلالة c إذا دعت الحاجة) .

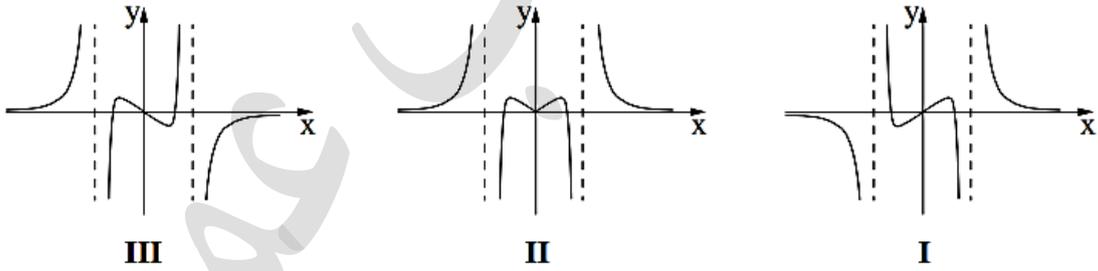
(2) جد خط التقارب الأفقي للدالة $f(x)$ ، وارسم رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.

هـ. معطاة الدالة $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ المعرفة في نفس المجال المعرفة فيه الدالتان $f(x)$ و $f'(x)$.

أمامك الرسوم البيانية III-I .

(1) أي رسم بياني من الرسوم البيانية، III-I ، هو الرسم البياني للدالة $g(x)$ ؟ علّل .

(2) عبر بدلالة c عن المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g(x)$ والمحور x .



أ مجال تعريف الدالة عندما المقام لا يساوي صفر. أي

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$\frac{(-x)^2 - bx - c}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x^2 - bx - c}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$$

$$x^2 - bx - c = x^2 + bx - c$$

$$-bx = bx$$

$$0 = 2bx$$

المعادلة صحيحة لكل x في مجال التعريف لذلك $b = 0$.

ج لأن هنالك نقطتي تقاطع لذلك $c > 0$. ولأن نقاط التقاطع محصورة بين خطوط التقارب العمودية 2 و -2 فإن $\sqrt{c} < 2 \Leftrightarrow c < 4$. لذلك:

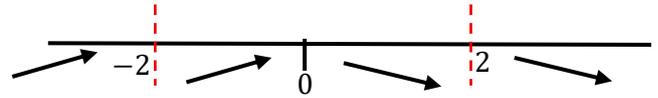
$$0 < c < 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - c}{x^2 - 4} \right)' = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - c)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(c - 4)}{(x^2 - 4)^2} \quad (1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 0$$

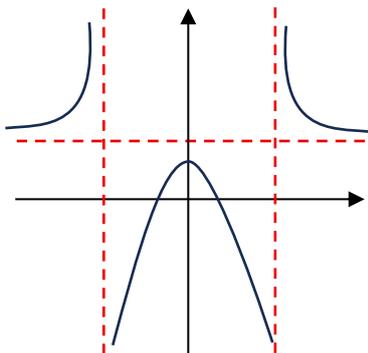
$$f'(-1) > 0, f'(1) < 0, f(0) = \frac{c}{4}$$



$(0, \frac{c}{4})$ نهاية عظمى.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - c}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad (2)$$

لذلك $y = 1$ هو خط تقارب أفقي.



(1) °

$$g(x) = f(x) \cdot f'(x)$$

حسب العلاقة بين المشتقة والذالة عندما تكون الذالة تصاعدية تكون المشتقة موجبة لذلك عندما تكون الذالة $f(x)$ موجبة وتصاعدية:

$$g(x) = \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+}$$

أي عندما يتحقق هاذ الأمر تكون $g(x)$ موجبة وهذا الأمر يتحقق في $x < -2$ لذلك الرسم I خاطئ

وحسب العلاقة بين المشتقة والذالة عندما تكون الذالة تنازلية تكون المشتقة سالبة لذلك عندما تكون الذالة $f(x)$ موجبة وتنازلية:

$$g(x) = \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{-}$$

أي عندما يتحقق هاذ الأمر تكون $g(x)$ سالبة وهذا الأمر يتحقق في $x > 2$ لذلك الرسم II خاطئ

لذلك الإجابة هي III .

(2)

$$S = 2 \left(- \int_0^{\sqrt{c}} f'(x) \cdot f(x) dx \right) = 2 \left(- \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^{\sqrt{c}} \right) = f^2(0) = \left(\frac{c}{4} \right)^2$$