بحث دالَّة كسريّة صيف 2019 – موعد (ب)

.8 معطاة الدالّة $f(x)=\dfrac{x^2+bx-c}{x^2-4}$. c وَ b هما پارامتران.

أ. جد مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

معطى أنّ الدالّة $f(x)$ هي زوجيّة.

ب. جد b .

معطى أنّه: توجد للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ نقطتا تقاطع مع المحور x بين خطّي تقاربها العموديّين.

جـ. جد مجال قيَم c .

د. **(1)** جد إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّد نوع هذه النقطة (عبّر بدلالة c إذا دعت الحاجة).

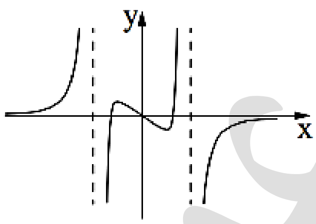
(2) جد خطّ التقارب الأفقيّ للدالّة $f(x)$ ، وارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

هـ. معطاة الدالّة $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ المعرَّفة في نفس المجال المعرَّفة فيه الدالّتان $f(x)$ وَ $f'(x)$.

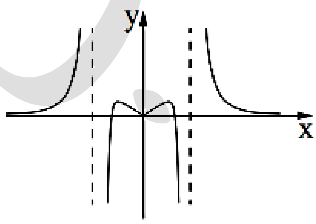
أمامك الرسوم البيانيّة I-III .

(1) أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة، I-III ، هو الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ ؟ علّل.

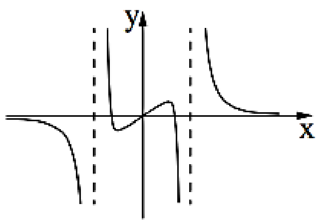
(2) عبِّر بدلالة c عن المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ والمحور x .



III



II



I

أ   مجال تعريف الدالة عندما المقام لا يساوي صفر. أي

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

ب

$$f(-x) = f(x)$$

$$\frac{x^2 - bx - c}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$$

$$x^2 - bx - c = x^2 + bx - c$$

$$-bx = bx$$

$$0 = 2bx$$

المعادلة صحيحة لكل x في مجال التعريف لذلك $b = 0$.

ج   لأن هنالك نقطتي تقاطع لذلك $c > 0$. ولأنّ نقاط التقاطع محصورة بين 2 و -2 فإن $\sqrt{c} < 2 \;\Rightarrow\; c < 4$. لذلك

$$0 < c < 4$$

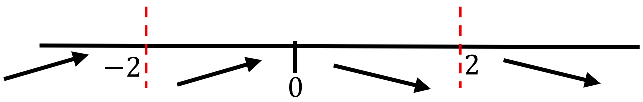
د   (1)

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - c}{x^2 - 4}\right)' = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - c)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(c - 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = 0$$

$$f'(-1) > 0, f'(1) < 0, f(0) = \frac{c}{4}$$

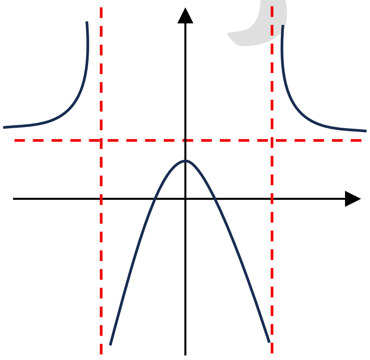


$(0, \frac{c}{4})$ نهاية عظمى.

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - c}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

لذلك $y = 1$ هو خط تقارب أفقي .



(1) ه

$$g(x) = f(x) \cdot f'(x)$$

حسب العلاقة بين المشتقّة والدّالّة عندما تكون الدّالّة تصاعدية تكون المشتقّة موجبة
لذلك عندما تكون الدّالّة $f(x)$ موجبة وتصاعدية:

$$g(x) = \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+}$$

أي عندما يتحقق هاذ الأمر تكون $g(x)$ موجبة وهذا الأمر يتحقق في $x < -2$ لذلك الرسم I خاطئ

وحسب العلاقة بين المشتقّة والدّالّة عندما تكون الدّالّة تنازلية تكون المشتقّة سالبة
لذلك عندما تكون الدّالّة $f(x)$ موجبة وتنازلية:

$$g(x) = \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{-}$$

أي عندما يتحقق هاذ الأمر تكون $g(x)$ سالبة وهذا الأمر يتحقق في $x > 2$ لذلك الرسم II خاطئ

لذلك الإجابة هي III .

(2)

$$S = 2\left(-\int_0^{\sqrt{c}} \cancel{f'(x)} \cdot f(x)dx\right) = 2\left(-\frac{f^2(x)}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{c}}\right) = f^2(0) = \left(\frac{c}{4}\right)^2$$