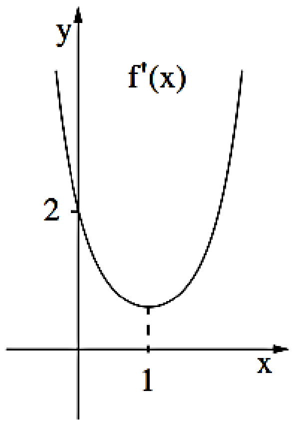
دوال قُوى صيف 2014

سُؤال 4:

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ، المعرَّفة لكلّ x .



أ. حسب الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$
جد مجالات التقعّر باتّجاه الأعلى $\cup$ وباتّجاه الأسفل $\cap$ للدالّة $f(x)$ ، المعرَّفة لكلّ x . علّل.

معطى أنّ الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع المحور y في جزئه السالب.

ب. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

جـ. معطى أيضًا أنّ: $f(x) = (x-a)e^{0.5x^2 - x}$ ، a هو بارامتر.
استعن بالمعطيات التي في الرسم البيانيّ لِـ $f'(x)$ ، واحسب المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ والمحورين.

أ)

نتذكَّر العلاقة بين الدالَّة الأصليَّة والمُشتقَّة الأولى والمُشتقَّة الثانية :

$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f'(x)$	↗	max	↘	min	↗
$f(x)$	$\cup$	التواء	$\cap$	التواء	$\cup$

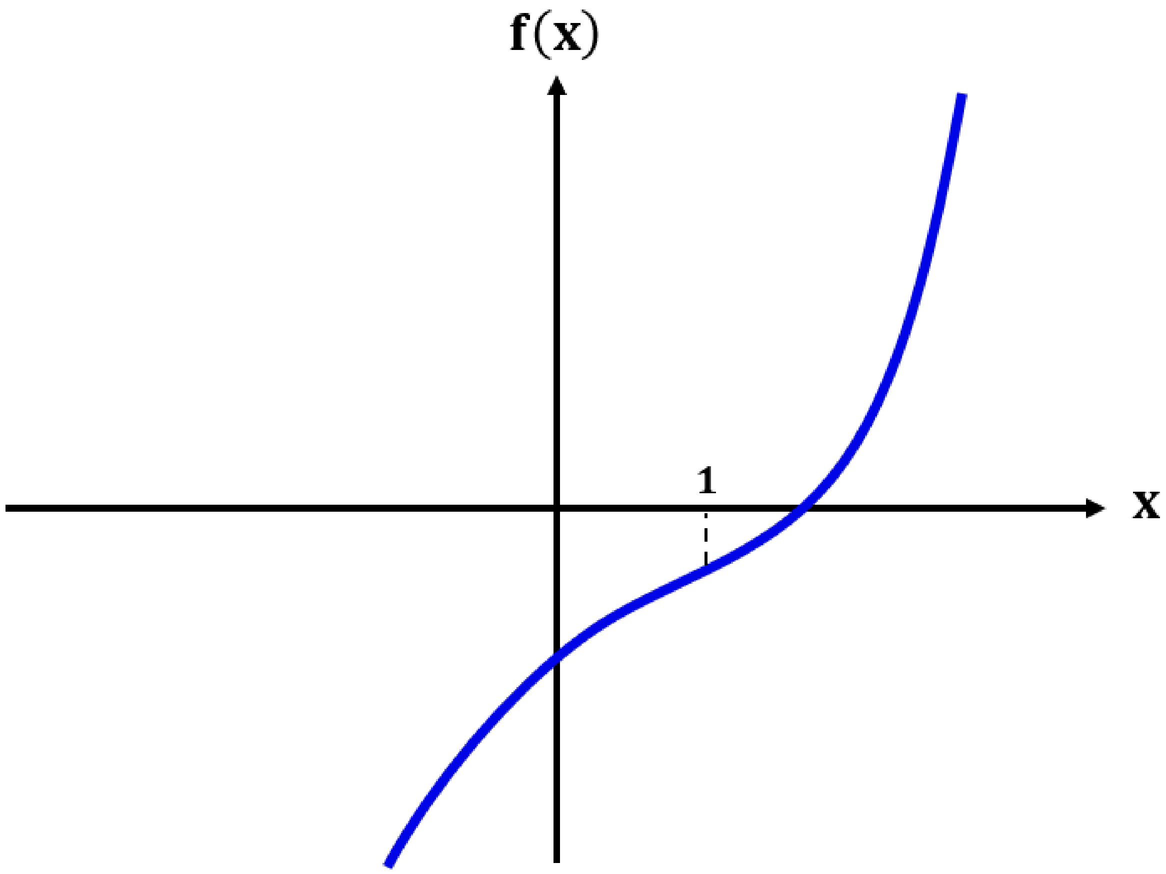
✓ أي أنَّهُ عندما تكون دالَّة المُشتقَّة تصاعُديَّة تكون عندها الدالَّة الأصليَّة تتقعَّر الى أعلى , وعندما تكون دالَّة المُشتقَّة تنازُليَّة تكون عندها الدالَّة الأصليَّة تتقعَّر الى أسفل .

نستنتج من ذلك أنَّ :-

مجال تقعُّر الدالَّة $f(x)$ الى أعلى : $1 < x$.

مجال تقعُّر الدالَّة $f(x)$ الى أسفل : $1 > x$.

ب)



ج)

$$f(x) = (x - a) \cdot e^{0.5x^2 - x}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f'(x) = e^{0.5x^2 - x} + (x - a) \cdot e^{0.5x^2 - x} \cdot (x - 1)}$$

كما هُو واضح من الرسم البياني للدالَّة $f'(x)$, الدالَّة تتقاطع مع محور y في $(0, 2)$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$e^{0.5 \cdot 0^2 - 0} + (0 - a) \cdot e^{0.5 \cdot 0^2 - 0} \cdot (0 - 1) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$1 - a \cdot 1 \cdot (-1) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$1 + a = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = 1}$$

<u>نجد تقاطُع الدالّة $f(x)$ مع المحورين :</u>

$$f(0) = (0-1) \cdot e^{0.5 \cdot 0^2 - 0} = -1 \quad \longrightarrow \quad (0\,,-1)$$

$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad (x-1) \cdot \underbrace{e^{0.5x^2 - x}}_{\text{لا يُساوي صفر أبدا}} = 0 \quad \longrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 1 \quad \longrightarrow \quad (1\,,0)$$

$$\int_0^1 \big(0 - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot e^{0.5x^2 - x}\,dx = \left[-e^{0.5x^2 - x}\right]_0^1 = -e^{0.5 \cdot 1^2 - 1} - \left(-e^{0.5 \cdot 0^2 - 0}\right)$$

$$= 1 - e^{-0.5} = \boxed{0.393}$$