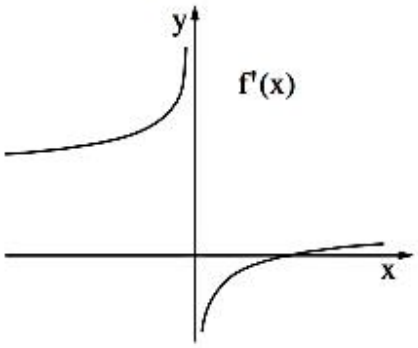
سؤال 5 :

يعرض الرسم الذي أمامك الرسم البياني



لدالة المشتقّة $f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

الدالة $f(x)$ معرَّفة لكلّ x .

أ. استعن بالرسم البياني لدالة المشتقّة $f'(x)$ ، وَجِد :

(1) مجالات تصاعد وتنازل

الدالة $f(x)$. علّل.

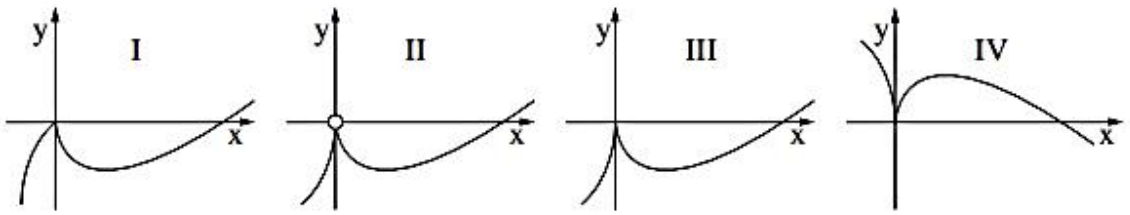
(2) مجالات التقعّر باتّجاه الأعلى $\cup$ وباتّجاه الأسفل $\cap$ للدالة $f(x)$

(إذا وُجدت مثل هذه المجالات). علّل.

ب. معطى أنّ المستقيم $y = -1$ يمسّ الرسم البياني للدالة $f(x)$ في نقطة نهايتها الصغرى.

جد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحورين.

جـ. أمامك أربعة رسوم بيانية I-IV . أيّ رسم بياني يمكنه أن يصف الدالة $f(x)$ ؟ علّل.



أ)

(1)

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\cdot \sqrt[3]{x} \Downarrow$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{x} = 2$$

$$\div 2 \Downarrow$$

$$\sqrt[3]{x} = 1$$

تكعيب الطرفين $\Downarrow$

$$x = 1$$

ينتُج من ذلك أنَّ:

- الدالَّة $f(x)$ تصاعُديَّة في المجال : $1 < x \ , \ x < 0$
- الدالَّة $f(x)$ تنازُليَّة في المجال : $0 < x < 1$

(2)

نتذكَّر العلاقة بين الدالَّة والمُشتقَّة الأُولى والمُشتقَّة الثانية بالنسبة لِ $g(x)$ عامَّة :

$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↗	max	↘	min	↗
$g(x)$	∪	التواء	∩	التواء	∪

بكلمات أُخرى , عندما تكون المُشتقَّة الأولى تصاعُديَّة تكون الدالَّة الأصليَّة في حالة تقعُّر الى أعلى , وعندما تكون المُشتقَّة الأُولى تنازُليَّة تكون الدالَّة الأصليَّة في حالة تقعُّر الى أسفل

$\Downarrow$

الدالَّة $f(x)$ تتقعَّر الى الأعلى في كل مجال تعريف مُشتقتها

ب)

وجدنا سابقا

x		0		1	
f '(x)	+		−	0	+
f(x)	↗		↘	min	↗

من الرسم البياني

$$\Downarrow$$

$$x_{min} = 1$$

مُعطى أنَّ المُستقيم $y = -1$ يمس النُقطة الدالَّة في نُقطة نهايتها العُظمى

$$\downarrow$$

$$f(x_{min}) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(1) = -1}$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int 2 - 2x^{\left(-\frac{1}{3}\right)}dx = 2x - \frac{2x^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= 2x - 3x^{\left(\frac{2}{3}\right)} + c$$

$$f(1) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^{\frac{2}{3}} + c = -1$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$2 - 3 + c = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c = 0}$$

$$\boxed{f(x) = 2x - 3x^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$

معهد إيهاب عمر

تقاطُع مع محور y :

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0^{\left(\frac{2}{3}\right)} = 0 \longrightarrow \boxed{(0,0)}$$

تقاطُع مع محور x :

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x - 3x^{\left(\frac{2}{3}\right)} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{x}_{x = 0} \cdot \underbrace{\left(2 - 3x^{-\frac{1}{3}}\right)}_{2 - 3x^{-\frac{1}{3}} = 0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2\sqrt[3]{x} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{27}{8}$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(0,0)\ ,\ \left(\frac{27}{8},0\right)}$$

ج)

- ✓ الدالَّة $f(x)$ مُعرَّفة لكُل x
- ✓ الدالَّة $f(x)$ مُقعرَّة باتجاه الأعلى في المجال $x \neq 0$

الرسم الوحيد الذي يُحقّق الصفات أعلاه هُو الرسم III .

معهد إيهاب عمر