بحث دالة جذرية شتاء 2016

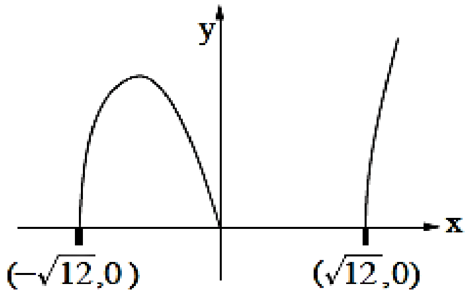
سؤال 6:

معطاة الدالّة $f(x)=\sqrt{ax^3-12x}$ ،

a هو بارامتر.

مجال تعريف الدالّة هو $x \ge \sqrt{12}$ ، $-\sqrt{12} \le x \le 0$

(انظر الرسم).



أ. حسب القيَم التي في الرسم البيانيّ، جد قيمة a .

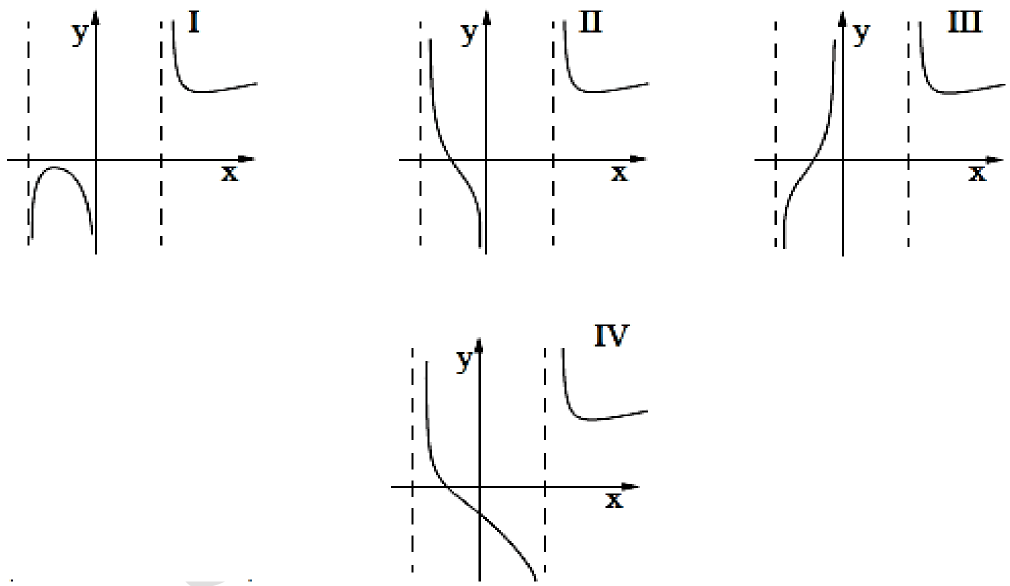
عوّض $a=1$ ، وأجب عن البنود "ب" ، "جـ" ، "د" .

ب. جد إحداثيّات نقطة النهاية العظمى للدالّة $f(x)$.

جـ. جد لأيّة قيَم k يوجد حلّ واحد فقط للمعادلة $f(x)=k$.

د. (1) ما هي خطوط التقارب المعامدة للمحور x لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ؟

(2) أيّ رسم بيانيّ من الرسوم البيانيّة I-IV التي أمامك هو الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ؟ علّل.



أ)

حسب الرسم يمكن ان نلاحظ ان الدالة قيمتها 0 في 3 نقاط: $(0,0), (\sqrt{12},0), (-\sqrt{12},0)$.

نعوض النقطة $(\sqrt{12},0)$ في الدالة الاصلية:

$$f(\sqrt{12}) = \sqrt{a(\sqrt{12})^3 - 12\sqrt{12}} = 0 \quad \rightarrow \quad a(\sqrt{12})^3 = 12\sqrt{12} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

<u>نعوض $a = 1$ في الدالة الاصلية:</u>

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x^3 - 12x}}$$

ب)

<u>نجد $f'(x)$:</u>

$$\boxed{f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{2\sqrt{x^3 - 12x}}}$$

<u>نطلب ان $f'(x) = 0$:</u>

$$\frac{3x^2 - 12}{2\sqrt{x^3 - 12x}} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\cancel{x = 2}$$

خارج مجال التعريف

نرسم الجدول لإيجاد تصاعد/ تنازل الدالة, وتحديد نوع النقاط الحرجة مع اضافة اطراف المجال المعرفة فيه الدالة اذا وجدت:

			$x=-3$		$x=-1$				$x=4$
x		$-\sqrt{12}$	$\downarrow$	-2	$\downarrow$	0		$\sqrt{12}$	$\downarrow$
$f'(x)$			$(+)$	0	$(-)$				$(+)$
$f(x)$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min		min	$\nearrow$

$$f'(-3)=\frac{3*(-3)^2-12}{2\sqrt{(-3)^3-12*(-3)}}=(+)$$

$$f'(-1)=\frac{3*(-1)^2-12}{2\sqrt{(-1)^3-12*(-1)}}=(-)$$

$$f'(4)=\frac{3*(4)^2-12}{2\sqrt{(4)^3-12*(4)}}=(+)$$

حسب الجدول، فان لدينا نقطة نهاية عظمى واحدة

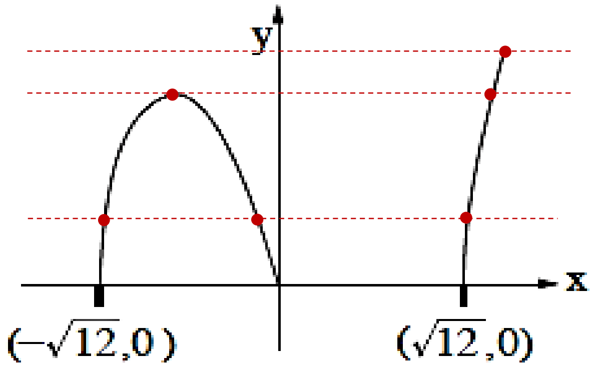
نجد احداثي y لنقطة النهاية العظمى. نعوض $x=-2$ في الدالة الاصلية:

$$f(-2)=\sqrt{(-2)^3-12(-2)}=4$$

النقطة $(-2,4)$ هي نقطة نهاية عظمى للدالة

ج)

المطلوب في هذا البند انه لأي قيم k يتقاطع المستقيم $y = k$ في نقطة واحدة مع الرسم للدالة $f(x)$.
للإجابة على هذا السؤال نمرر مستقيمات موازية لمحور x. ونرى عدد النقاط التي يتقاطع فيها المستقيم مع الدالة $f(x)$.



عندما $k > 4$ يوجد نقطة تقاطع واحدة بين الدالة والمستقيم اذن:

للمعادلة $f(x) = k$ يوجد حل واحد
عندما $k > 4$

د)(1)

<u>نجد خطوط التقارب العامودية للمشتقة, نطلب (المقام = 0):</u>

$$2\sqrt{x^3 - 12x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 - 12x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 12) = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{x = 0, \quad x = \sqrt{12}, \quad x = -\sqrt{12}}$$

(2)

* الدالة تنازلية في المجال ⟸ رسم المشتقة تحت محور x.
* الدالة تصاعدية في المجال ⟸ رسم المشتقة فوق محور x.
* النقاط الحرجة في الدالة هي نقاط تقاطع المشتقة مع محور x.

حسب الحل السابق يمكن ملاحظة:

1) ان للدالة نقطة حرجة ونوعها max في $x=-2$, نستنتج من ذلك ان دالة المشتقة تتقاطع مع محور x في $x=-2$. وهذه النقطة هي تحول من موجب لسالب في المشتقة.

2) ان للمشتقة خطوط تقارب في: $x=-\sqrt{12}, \quad x=\sqrt{12}, \quad x=0$.

اذن الرسم الملائم هو II