أعداد مركبة صيف 2014

سُؤال 3:

أ. ارسم في مستوى چاوس رسمًا تقريبيًّا للمحلّ الهندسيّ للأعداد المركّبة z التي تحقّق: $|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$. علّل.

ب. المحلّ الهندسيّ الذي في البند "أ" يلتقي مع المحور x في النقطة z_1 .

معطاة النقطة $M(-3,\sqrt{3})$. نرمز بـ O إلى نقطة أصل المحاور.

العدد المركّب z_2 يقع على المحلّ الهندسيّ الذي في البند "أ" بحيث يكون الشكل الرباعيّ z_1Mz_2O دالتون.

جد الزاوية الحادّة للدالتون.

جـ. (1) جد زاوية z_2 (הארגומנט של z_2).

(2) من بين الأعداد المركّبة z التي في البند "أ"، ما هو العدد الذي لديه أكبر زاوية (ארגומנט)؟

ما هي هذه الزاوية؟

أ)

نرمُز: $z=x+yi$

$$|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$|x+yi+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$|(x+3)+(y-\sqrt{3})i|=\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

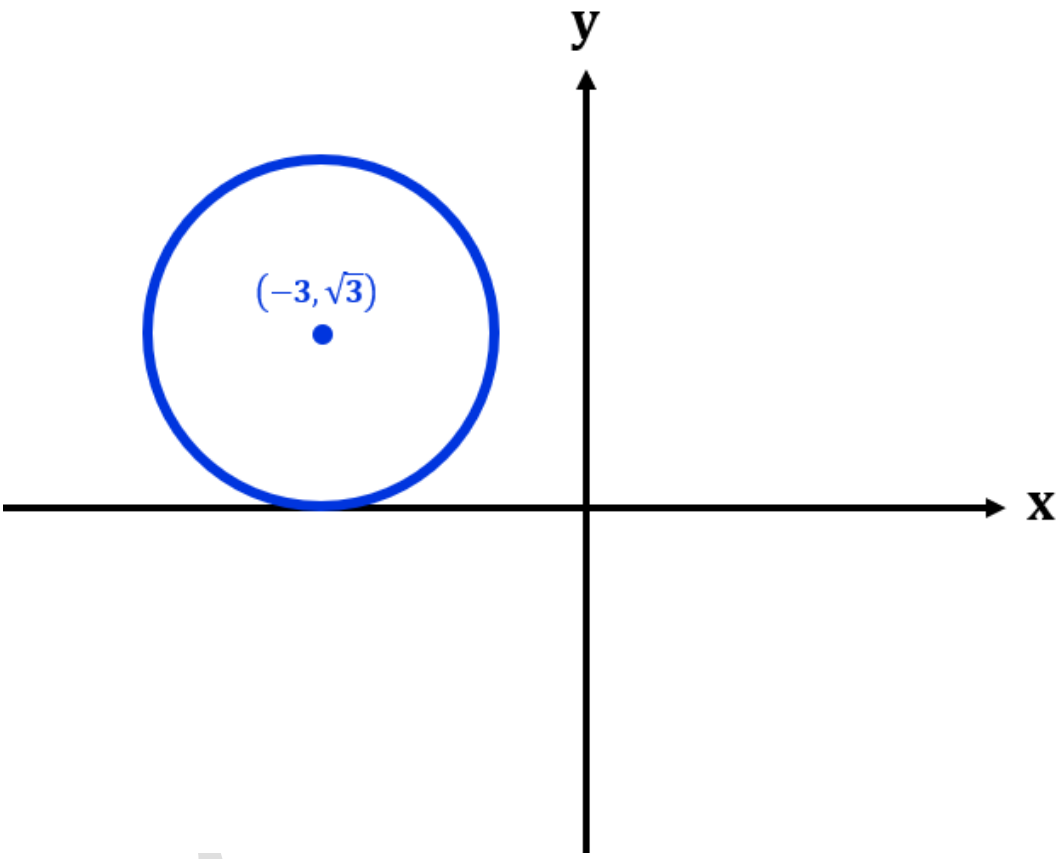
$$\sqrt{(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$(x+3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$$

دائرة مركزها في $(-3,\sqrt{3})$ وطول قُطرُها $\sqrt{3}$



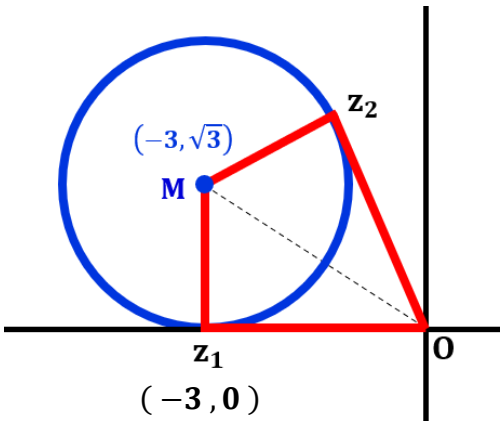
ب)

- $(x+3)^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2=3$: z_1

$\longleftarrow$ $(x+3)^2+3=3$ $\longleftarrow$

$x=-3$ $\longleftarrow$ $(x+3)^2=0$

- M هي نُقطة مركز الدائرة



محور x يمُس الدائرة في النُقطة z_1 , ولهذا فإنَّ $\measuredangle Mz_1O = 90°$

(أقطار الدائرة مُتساوية) $Mz_1 = Mz_2$

$$\Downarrow$$

(الزوايا الجانبيَّة في الدالتون مُتساوية) $\measuredangle Mz_2O = 90°$

✓ المُستقيم MO يُنصّف الزوايا $\measuredangle O$ و $\measuredangle M$.

نحسب الزاوية $\measuredangle MOz_1$:

$$\measuredangle MOz_1 = \tan^{-1}\left(\frac{Mz_1}{Oz_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle z_2Oz_1 = 30 \cdot 2 = 60°$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle M = 360 - 90 - 90 - 60 = 120°$$

الزاوية الحادَّة هي $\measuredangle z_2Oz_1 = 60°$

ج) (1)

$$\arg(z_2) = 180 - \measuredangle z_2Oz_1 = 180 - 60 = \boxed{120°}$$

(2)

لأنَّ المحل الهندسي للأعداد z يقع في الرُبع الثاني , نستنتج أنَّ أكبر $\arg$ لعدد z هي عندما يكون احداثي y أصغر ما يُمكن . ولهذا فإنَّ أصغر $\arg$ هو للعدد $z = -3$ وزاويتُه $180°$.

معهد إيهاب عمر