

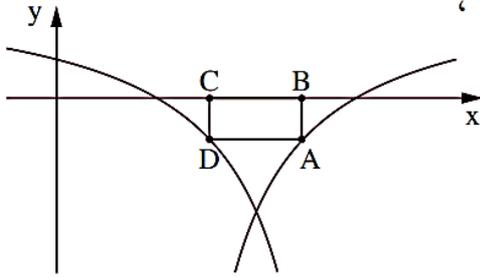
قيم قصوى - 2021 صيف خاص

8. معطاة الدالتان: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

أ. أجب عن البند "أ" بالنسبة لكل واحدة من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$.
(1) جد مجال تعريف الدالة .

(2) جد إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحورين .

الرسم الذي أمامك يصف جزءاً من الرسم البياني للدالة $f(x)$ ، وجزءاً من الرسم البياني للدالة $g(x)$ ، ويصف مستطيلاً محصوراً بينهما وبين المحور x .



الضلع BC للمستطيل موضوع على المحور x ، والضلع المقابل، AD ، يَصِل بين نقطة على الرسم البياني لـ $f(x)$ وبين نقطة على الرسم البياني لـ $g(x)$ ، كما هو موصوف في الرسم .

نرمز بـ t إلى الإحداثي x للنقطة A .

ب. حدّد ما هو المجال الممكن لقيم t .

ج. (1) عبّر بدلالة t عن طول الضلع AB .

(2) برهن أنّ الإحداثي x للنقطة D هو $4-t$.

(3) عبّر بدلالة t عن مساحة المستطيل ABCD .

د. جد t الذي بالنسبة له مساحة المستطيل ABCD هي أكبر ما يمكن .

{ نجد مجال تعريف الدالتين }

أ. (1)

مع $g(x)$

$$x \neq 1$$

مع $f(x)$

$$x \neq 3$$

{ نجد نقاط تقاطع الدالتين مع المحاور } (2)

$$: f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

مع y

$$\frac{0-1}{0-3} = y$$

$$\frac{1}{3} = y$$

$$\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

مع x

$$\frac{x-1}{x-3} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$(1, 0)$$

$$: g(x) = \frac{x-3}{x-1}$$

مع y

$$\frac{0-3}{0-1} = y$$

$$3 = y$$

$$(0, 3)$$

مع x

$$\frac{x-3}{x-1} = 0$$

$$x-3 = 0$$

$$x = 3$$

$$(3, 0)$$

{ نجد المجال الممكن لقيم t }

ب.

نجد نقطة التقاطع بين الدالتين

$$g(x) = f(x)$$

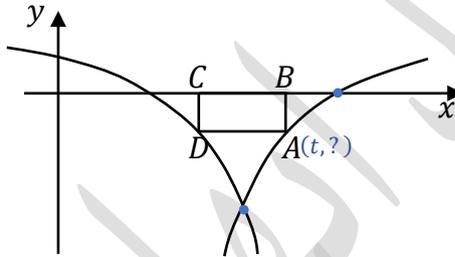
$$\frac{x-3}{x-1} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$(x-3)^2 = (x-1)^2$$

$$\cancel{x^2} - 6x + 9 = \cancel{x^2} - 2x + 1$$

$$4x = 8$$

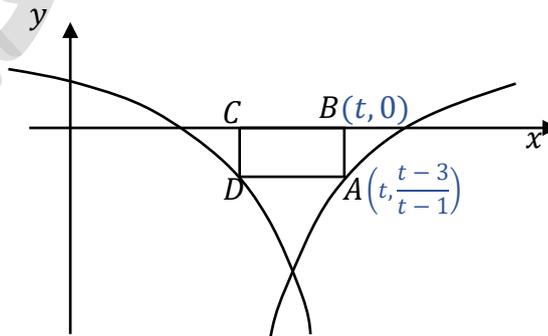
$$x = 2$$



$$2 < t < 3$$

{ نجد AB بدلالة t }

ج. (1)



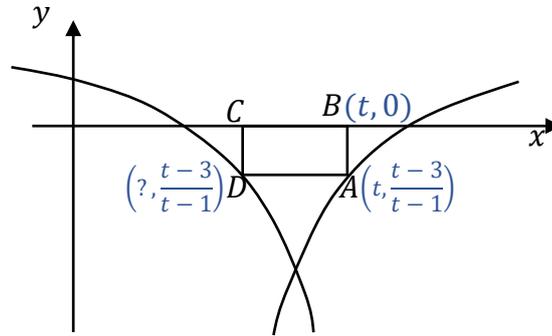
$$AB = y_B - y_A$$

$$AB = 0 - \frac{t-3}{t-1}$$

$$AB = -\frac{t-3}{t-1}$$

{نبرهن المطلوب}

(2)



نعوض إحداثي y_D بالدالة $f(x)$

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{t-3}{t-1}$$

$$(x-1)(t-1) = (x-3)(t-3)$$

$$\cancel{xt} - x - t + 1 = \cancel{xt} - 3x - 3t + 9$$

$$2x + 2t = 8$$

$$2x = 8 - 2t$$

$$x = 4 - t$$

{نجد S_{ABCD} بدلالة t }

(3)

$$S_{ABCD} = AB \cdot DA$$

$$S_{ABCD} = -\frac{t-3}{t-1} \cdot DA$$

$$DA = t - (4 - t) = 2t - 4$$

$$S_{ABCD} = \left(-\frac{t-3}{t-1}\right) \cdot (2t-4)$$

د. نجد اكبر قيمة لـ t التي بالنسبة لها S_{ABCD} اكبر ما يمكن

$$f(t) = \left(-\frac{t-3}{t-1}\right) \cdot (2t-4) \quad \leftarrow \text{دالة الهدف}$$

$$f(t) = \frac{(-t+3)(2t-4)}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{-2t^2+4t+6t-12}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{-2t^2+10t-12}{t-1}$$

$$f'(t) = \frac{(-4t+10)(t-1) - 1(-2t^2+10t-12)}{(t-1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-4t^2+4t+10t-10+2t^2-10t+12}{(t-1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-2t^2+4t+2}{(t-1)^2}$$

$$f'(t) = 0$$

$$0 = \frac{-2t^2+4t+2}{(t-1)^2}$$

$$0 = -2t^2+4t+2$$

$$2 < t < 3$$

$$\times t_1 = -0.412$$

$$t_2 = 2.412$$

t		2.412	
$f'(t)$	+		-
$f(t)$	↗	0	↘

$$t = 2.412 \rightarrow \max$$