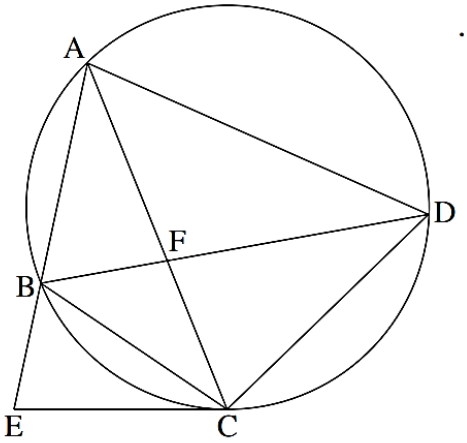
هندسة مستوية – صيف 2024

4. الشكل الرباعيّ ABCD محصور في دائرة. قطرا الشكل الرباعيّ يتقاطعان في النقطة F .
المماسّ للدائرة في النقطة C يقطع امتداد الوتر AB في النقطة E (انظروا الرسم).



معطى أنّ: $AB = CB$.

أ. برهِنوا أنّ: $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$.

معطى أنّ: AC يُنصِّف الزاوية ECD ، $\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$.

ب. **(1)** برهِنوا أنّ: $AC = AD$.

(2) جدوا النسبة $\frac{AD}{CD}$.

(3) جدوا النسبة بين مساحة المثلّث ABF ومساحة المثلّث CBF .

نرمز بـ S إلى مساحة المثلّث ABF .

جـ. عبِّروا بدلالة S عن مساحة المثلّث AEC .

معهد إيهاب عمر

أ. نبرهن أنّ $\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC$

معطى: $AB = CB$

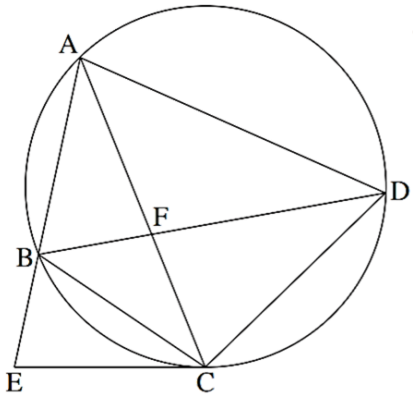
$\Longrightarrow \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \alpha$

(زوايا محيطية مرتكزة على أوتار متساوية)

$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BDC = \alpha$

(الزاوية المحصورة بين المماس والوتر مساوية للزاوية المحيطية المرتكزة على الوتر من الجهة الأخرى)

$\sphericalangle EBC = 2\alpha$



زاوية خارجية لمثلث ΔABC

$\sphericalangle EBC = 2 \cdot \sphericalangle BDC = 2\alpha$

ب. (1) نبرهن أنّ $AC = AD$

AC ينصف الزاوية ECD

بما أنّ:

$\sphericalangle BCE = \sphericalangle ACB = \alpha$

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 2\alpha$

$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD = 2\alpha$

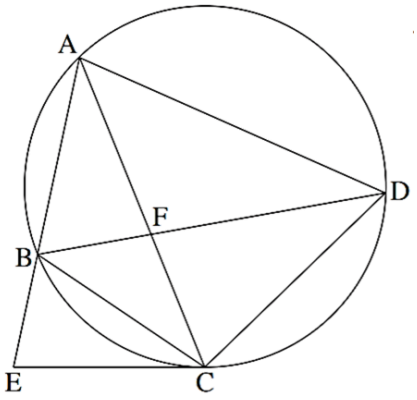
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$

$\Longrightarrow$ ΔACD متساوي الساقين

$\Downarrow$

$AC = AD$

ب. (2) نجد النسبة $\frac{AD}{CD}$



معطى: $\frac{CD}{CF}=\frac{7}{4}$

نفرض: $CD=7x$

$$\Downarrow$$

$$CF=4x$$

نفرض $AF=y$

$$\Downarrow$$

$$AC=AD=4x+y$$

BD هو منصف زاوية

حسب نظرية منصف الزاوية:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AF}{CF}=\frac{4x+y}{7x}=\frac{y}{4x}$$

$$4x(4x+y)=7x\cdot y$$

$$16x+4y=7y$$

$$y=\frac{16}{3}x$$

نعوّض قيمة y بدلالة x:

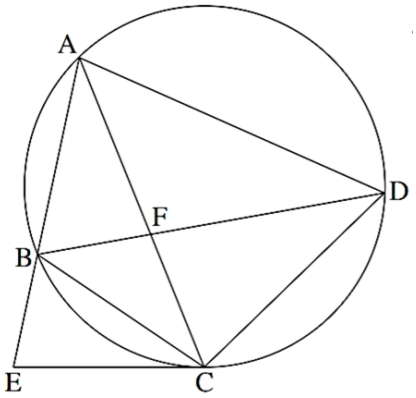
$$\frac{AD}{CD}=\frac{4x+y}{7x}\Rightarrow\frac{AD}{CD}=\frac{4x+\frac{16}{3}x}{7x}=\frac{4}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{4}{3}$$

ب. (3) نجد $\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta CBF}}$

للمثلثين نفس الارتفاع لذلك فإنّ النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين قواعد المثلثين



$$\Downarrow$$

$$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta CBF}} = \frac{AF}{CF} = \frac{y}{4x} = \frac{\frac{16}{3}x}{4x} = \frac{4}{3}$$

ج. نعبّر بدلالة S عن مساحة المثلث ΔAEC

نرمز ب S الى مساحة المثلث ΔABF

$$\Downarrow$$

حسب النسبة التي وجدناها في البند السابق:

$$S_{\Delta CBF} = \frac{3}{4}S$$

$$\measuredangle ABD = \measuredangle EBC = 2\alpha$$

$$AB = CB$$

$$\measuredangle BCE = \measuredangle BAC = \alpha$$

$$\Delta BEC \cong \Delta ABF$$

حسب نظرية التطابق (ز. ض. ز)

$$S_{\Delta ABF} = S_{\Delta BEC} = S$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta AEC} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta BFC} + S_{\Delta BEC} = S + \frac{3S}{4} + S = \frac{11s}{4} = 2.75S$$