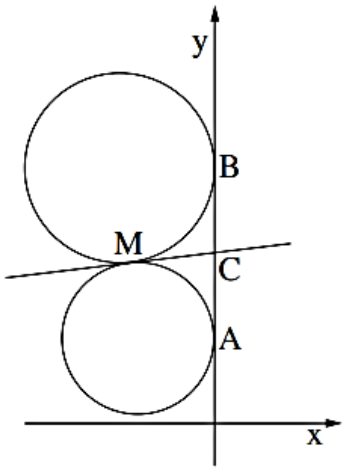
شتاء 2013

سُؤال 2:

دائرتان مركزاهما موجودان في الربع الثاني



تمسّان المحور y في النقطتين $A(0,1)$ وَ $B(0,3)$.

تمسّ الدائرتان إحداهما الأخرى في النقطة M (انظر الرسم).

أ. المماس المشترك للدائرتين يقطع المحور y في النقطة C .

بيّن أنّ $MC=\frac{1}{2}AB$.

ب. (1) جد معادلة المحلّ الهندسي لنقاط التماس M التي تتكوّن بالطريقة الموصوفة.

(2) ما هو شكل المحلّ الهندسي للنقاط M ، وفي أيّ ربع/أرباع يتواجد هذا المحلّ الهندسي؟

جـ. دليل القطع المكافئ $y^2=2px$ يمسّ المحلّ الهندسي الذي وجدتَ معادلته في البند "ب".

جد إحداثيات النقاط على القطع المكافئ التي بُعدها عن بؤرته هو 10 .

أ)

المماسات الخارج من نفس النُقطة الى نفس الدائرة هي مماسات مُتساوية

$$CM=CB$$
$$CM=CA$$
$$\Downarrow$$
$$CM=CB=CA=\frac{1}{2}AB$$
$$\Downarrow$$
$$MC=\frac{1}{2}AB$$

ب) (1)

النُقطة C تقع وسط AB , أي أنَّ النُقطة C تُساوي $\frac{A+B}{2}$

$$\Downarrow$$

$$C\left(\frac{0+0}{2},\frac{3+1}{2}\right)$$

حسب قانون وسط قطعة :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C\,(0,2)}$$

$$MC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

نرمُز : $M\,(x_M\,,\,y_M)$

البُعد بين النُقطة M والنُقطة C هُو 1 كما وجدنا قبل قليل $(MC = 1)$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = 1^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x_M - 0)^2 + (y_M - 2)^2} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(x_M)^2 + (y_M - 2)^2 = 1$$

دائرة مركزها في $(0\,,2)$ ونصف قُطرها 1

مُعطى أنَّهُ كُل من الدائرتين موجودتين في الرُبع الثاني , أي أنَّ تماسهُما موجود أيضا في الرُبع الثاني

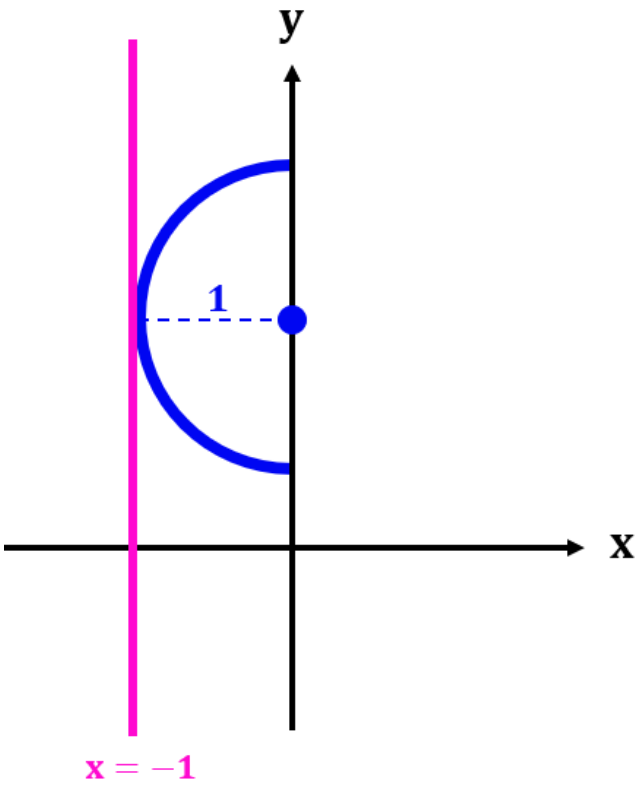
$$\Downarrow$$

$$\boxed{x < 0 \;\;,\;\; x^2 + (y-2)^2 = 1}$$

(2)

شكل المحل الهندسي الخاص بالنُقاط M هُو نصف دائرة موجودة
في الرُبع الثاني (هذا المحل الهندسي لا يتقاطع مع المحور y)

ج)



مُعادلة دليل القطع المُكافئ $y^2 = 2px$: $x = -1$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{p}{2} = -1$$

$$\cdot(-2) \Downarrow$$

$$\boxed{p = 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y^2 = 4x}$$

✓ النُقاط الموجودة على القطع المُكافئ تبعُد عن البُؤرة بنفس المقدار الذي تبعُده عن الدليل , ولهذا نجد النُقاط التي بُعدها عن الدليل هُو 10 .

بُعد أي نُقطة على القطع المُكافئ $(y^2 = 4x)$ عن الدليل يُساوي : $(x + 1)$.

نطلُب : $x + 1 = 10$.

$$x + 1 = 10$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = 9}$$

$$y^2 = 4x \quad \longrightarrow \quad y^2 = 4 \cdot 9 \quad \longrightarrow \quad y^2 = 36 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = \pm 6}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(9, 6)} \ , \ \boxed{(9, -6)}$$

معهد إيهاب عمر